

# Geometryczna teoria grup

Ściągnięte przez Piotra Sołtana od Etienne Ghysa, Pierre'a de la Harpe,  
Wolfganga Lücka, Yanna Olliviera i Andrzeja Żuka

29 sierpnia 2004

## Streszczenie

W geometrycznej teorii grup badamy nieskończone (ale skończenie generowane) grupy dyskretne patrząc na nie jako na obiekty geometryczne, a konkretnie przestrzenie metryczne.

## Spis treści

|          |                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Graf Cayleya skończenie generowanej grupy</b> | <b>2</b>  |
| 1.1      | Przykłady quasi-izometrii . . . . .              | 4         |
| <b>2</b> | <b>Wzrost grup</b>                               | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Własności geometryczne grup</b>               | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Grupy hiperboliczne</b>                       | <b>8</b>  |
| 4.1      | Własności grup hiperbolicznych . . . . .         | 9         |
| <b>5</b> | <b>Grupy Kazhdana</b>                            | <b>11</b> |
| 5.1      | Ciekawe zastosowanie . . . . .                   | 13        |
| <b>6</b> | <b>Grupy losowe</b>                              | <b>14</b> |

# 1 Graf Cayleya skończenie generowanej grupy

Niech  $\Gamma$  będzie skończenie generowaną grupą i niech  $S$  będzie skończonym układem generatorów  $\Gamma$ . Będziemy zakładać, że  $s \in S$  implikuje  $s^{-1} \in S$ , oraz że  $e$  (element neutralny  $\Gamma$ ) nie należy do  $S$ .

Z parą  $(\Gamma, S)$  możemy związać *funkcję długości*, t.j. funkcję  $l_S: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_+$  zdefiniowaną w następujący sposób: dla  $x \in \Gamma$  liczba  $l_S(x)$  jest najmniejszym takim  $n$ , że istnieje ciąg  $(s_1, \dots, s_n)$  elementów zbioru  $S$  taki, że  $x = s_1 s_2 \cdots s_n$ . Łatwo sprawdzamy, że funkcja  $l_S$  ma własności, które zapewniają, że

$$d(x, y) = l_S(x^{-1}y)$$

jest metryką na  $\Gamma$ . W ten sposób  $\Gamma$  (wraz ze skończonym zbiorem generatorów  $S$ ) staje się obiektem geometrycznym.

Innym punktem widzenia opisanej wyżej operacji jest utworzenie *grafu Cayleya* dla pary  $(\Gamma, S)$ . Graf ten oznaczamy symbolem  $G(\Gamma, S)$ . Jego wierzchołkami są elementy grupy  $\Gamma$ , a krawędź pomiędzy dwoma wierzchołkami  $x$  i  $y$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $x^{-1}y \in S$ . Każdą krawędź utożsamiamy z odcinkiem  $[0, 1]$  z jego standardową metryką i wprowadzamy metrykę  $d_S$  na całym grafie biorąc za odległość dowolnych dwóch punktów  $a$  i  $b$  naszego grafu (niekoniecznie wierzchołków) długość najkrótszej łączącej je drogi.

Podstawową kwestią staje się: jak przestrzeń metryczna  $(\Gamma, d_S)$  zależy od wyboru układu generatorów  $S$ ? Odpowiedź nie jest zbyt trudna, ale wymaga wprowadzenia następującej definicji.

**Definicja 1.1** Niech  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie  $\Phi: X \rightarrow Y$  nazywamy *quasi-izometrią*, jeśli istnieją stałe  $\lambda > 0$  i  $C \geq 0$  takie, że dla dowolnych  $x_1, x_2 \in X$

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + C.$$

Powiemy, że przestrzenie  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  są *quasi-izometryczne*, jeśli istnieje stała  $D \geq 0$  taka, że dla dowolnego  $y \in Y$  istnieje  $x \in X$  taki, że  $d_Y(\Phi(x), y) \leq D$ .

**Uwaga 1.2** Relacja quasi-izometryczności jest relacją równoważności. Wynika to natychmiast z następującej charakteryzacji: przestrzenie metryczne  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  są quasi-izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwzorowania  $\phi: X \rightarrow Y$ ,  $\psi: Y \rightarrow X$  oraz stałe  $\lambda > 0$ ,  $C \geq 0$  takie, że dla dowolnych  $x, x' \in X$  i  $y, y' \in Y$  mamy

$$\begin{aligned} d_Y(\phi(x), \phi(x')) &\leq \lambda d_X(x, x') + C, \\ d_X(\psi(y), \psi(y')) &\leq \lambda d_Y(y, y') + C, \\ d_Y(\phi \circ \psi(y), y) &\leq C, \\ d_X(x, \psi \circ \phi(x)) &\leq C. \end{aligned}$$

**Stwierdzenie 1.3** *Niech  $S$  i  $S'$  będą dwoma skończonymi zbiorami generatorów grupy  $\Gamma$ . Oznaczmy odpowiadające im metryki przez  $d$  i  $d'$ . Wówczas przestrzenie metryczne  $(\Gamma, d)$  i  $(\Gamma, d')$  są quasi-izometryczne.*

DOWÓD. Oznaczmy  $\lambda_1 = \max\{d'(s, e) : s \in S\}$  oraz  $\lambda_2 = \max\{d(s', e) : s' \in S'\}$  i niech  $\phi$  będzie odwzorowaniem identycznościowym  $\Gamma \rightarrow \Gamma$ . Akurat tak się składa, że  $\phi$  jest bijekcją i  $\phi^{-1} = \phi$ , ale oznaczmy mimo wszystko  $\phi^{-1}$  przez  $\psi$ . Pokażemy, że dla dowolnych  $x, y \in \Gamma$  mamy

$$\begin{aligned} d'(\phi(x), \phi(y)) &\leq \lambda_1 d(x, y), \\ d(\psi(x), \psi(y)) &\leq \lambda_2 d'(x, y). \end{aligned}$$

Ponieważ metryki pochodzące od funkcji długości są lewo niezmiennicze (to znaczy, że  $d(zx, zy) = d(x, y) \forall x, y, z$ ), a  $\phi$  i  $\psi$  są homomorfizmami, wystarczy pokazać, że

$$\begin{aligned} d'(\phi(x), e) &\leq \lambda_1 d(x, e), \\ d(\psi(x), e) &\leq \lambda_2 d'(x, e). \end{aligned} \tag{1}$$

Zajmijmy się pierwszą z tych nierówności. Jest ona tautologią dla  $x \in S \cup \{e\}$ . Przyjmijmy, że jest spełniona dla elementów długości  $n$  i weźmy  $x$  długości  $n+1$ . Innymi słowy możemy przedstawić  $x$  w postaci  $sy$ , gdzie  $s \in S$ , a  $y$  jest zredukowanym słowem na literach z  $S$ , długości  $n$ . W tym przypadku  $d(x, e) = l_S(x^{-1}) = l_S(x) = n+1$ . Zauważmy, że skoro słowo  $y$  jest zredukowane,  $d(y, e) = l_S(y) = n$ . Stąd

$$\begin{aligned} d'(x, e) &= d'(sy, e) \\ &\leq d'(s, e) + d'(y, e) \\ &\leq \lambda_1 + d'(y, e) \\ &\leq \lambda_1 + \lambda_1 d(y, e) \\ &= \lambda_1(1 + d(y, e)) \\ &= \lambda_1(1 + n) = \lambda_1 d(x, e) \end{aligned}$$

na mocy założenia indukcyjnego. Podobnie dowodzimy drugiej z nierówności (1). Jeśli przyjmujemy  $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$  i  $C = 0$ , to natychmiast widzimy, że odwzorowania  $\phi$  i  $\psi$  ustanawiają quasi-izometrię przestrzeni  $(\Gamma, d)$  i  $(\Gamma, d')$  (por. uwaga 1.2). Q.E.D.

Warto jeszcze doprecyzować relację pomiędzy obiektami  $(\Gamma, d_S)$  i  $G(\Gamma, S)$  opisanymi powyżej. Przestrzeń metryczna  $(\Gamma, d_S)$  jest przestrzenią dyskretną, natomiast graf Cayleya  $G(\Gamma, S)$  budujemy wstawiając (izometrycznie) odcinek  $[0, 1]$  w miejsce każdej krawędzi. Jest jasne, że otrzymujemy w ten sposób przestrzeń spójną. Zauważmy, że odwzorowanie  $\Phi: \Gamma \hookrightarrow G(\Gamma, S)$  przeprowadzające każdy  $x \in \Gamma$  na odpowiedni wierzchołek grafu jest izometrycznym zanurzeniem (a więc oczywiście quasi-izometrią), ale ponadto ustanawia relację quasi-izometryczności pomiędzy przestrzeniami metrycznymi  $(\Gamma, d_S)$  i  $G(\Gamma, S)$  ( $\Phi$  spełnia warunki z definicji 1.1 ze stałymi  $\lambda = 1$ ,  $C = 0$  i  $D = \frac{1}{2}$ ).

## 1.1 Przykłady quasi-izometrii

Jest absolutnie jasne, że przestrzenie izometryczne są quasi-izometryczne oraz, że quasi-izometryczność jest relacją o wiele słabszą. Przykładowo wszystkie przestrzenie metryczne o skończonej średnicy są quasi-izometryczne z przestrzenią jednopunktową. Oznacza to, że w geometrycznej teorii grup, grupy skończone są obiektami trywialnymi.

Przy próbie wyjaśnienia istoty relacji quasi-izometryczności często przywoływany jest następujący slogan:

*quasi-izometrie utożsamiają przestrzenie, które wyglądają tak samo, gdy patrzymy na nie z dużej odległości.*

Dobłą ilustracją idei, która kryje się za powyższym sloganem jest porównanie grafów  $G(\mathbb{Z}, \{-1, 1\})$  i  $G(\mathbb{Z}, \{-3, -2, 2, 3\})$ .

Przykładem quasi-izometrii pomiędzy przestrzeniami metrycznymi pochodzącymi od skończone generowanych grup jest homomorfizm grup  $\Phi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  taki, że  $|\ker \Phi| < \infty$  i  $[\Gamma_2 : \Phi(\Gamma_1)] < \infty$ .

Żeby opisać nieco bardziej wyrafinowane przykłady quasi-izometrii wprowadzimy kilka pojęć związanych z przestrzeniami metrycznymi. Niech  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że  $(X, d_X)$  jest *geodezyjna*, jeśli dla dowolnych  $x, y \in X$  istnieje izometria  $f: [0, d(x, y)] \rightarrow X$  taka, że  $f(0) = x$ , a  $f(d(x, y)) = y$  (nie zakładamy, że istnieje jedyna taka izometria). Teraz niech (dyskretna) grupa  $\Gamma$  działa na przestrzeni  $X$  jako grupa izometrii. Działanie to nazwiemy *właściwym*, jeśli dla każdego zwartego podzbioru  $K \subset X$  zbiór  $\{\lambda \in \Gamma : \lambda K \cap K \neq \emptyset\}$  jest skończony.

**Twierdzenie 1.4** *Niech  $X$  będzie geodezyjną przestrzenią metryczną i niech grupa  $\Gamma$  działa na  $X$  izometriami. Załóżmy, że działanie to jest właściwe. Jeśli przestrzeń  $\Gamma \backslash X$  jest zwarta, to  $\Gamma$  jest grupą skończenie generowaną quasi-izometryczną z przestrzenią  $X$ .*

### Wniosek 1.5

(i) *Niech  $\Gamma$  będzie skończenie generowaną grupą i niech  $\Gamma'$  będzie podgrupą skończonego indeksu w  $\Gamma$ . Wówczas  $\Gamma'$  jest skończenie generowana i quasi-izometryczna z  $\Gamma$ .*

(ii) *Niech  $1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$  będzie krótkim ciągiem dokładnym grup, w którym  $\Gamma'$  jest grupą skończoną, a  $\Gamma$  i  $\Gamma''$  są skończenie generowane. Wówczas grupy  $\Gamma$  i  $\Gamma''$  są quasi-izometryczne.*

(iii) *Niech  $\Gamma$  będzie grupą podstawową zamkniętej, orientowalnej powierzchni genusu większego lub równego 2. Wówczas  $\Gamma$  jest quasi-izometryczna z płaszczyzną hiperboliczną  $\mathbb{H}^2$ .*

**DOWÓD.** Pierwszy punkt dowodzimy wybierając skończony zbiór generatorów  $S$  dla  $\Gamma$  i rozważając naturalne działanie  $\Gamma'$  na  $G(\Gamma, S)$ .

Podobnie dla dowodu punktu drugiego bierzemy naturalne działanie  $\Gamma$  na  $G(\Gamma'', S'')$ , gdzie  $S''$  jest skończonym zbiorem generatorów dla  $\Gamma''$ .

Dowód punktu trzeciego przebiega podobnie. Wybieramy na powierzchni metrykę riemannowską o stałej krzywiznie  $-1$ . Wtedy nakryciem uniwersalnym naszej powierzchni jest  $\mathbb{H}^2$ ,  $\Gamma$  działa na  $\mathbb{H}^2$  i spełnione są pozostałe założenia twierdzenia 1.4. Q.E.D.

Punkt (iii) powyżej można oczywiście uogólnić w następujący sposób: niech  $\Gamma$  będzie grupą podstawową zwartej rozmaitości riemannowskiej  $M$ , wówczas (jako przestrzeń metryczna) grupa  $\Gamma$  jest quasi-izometryczna z riemannowskim nakryciem uniwersalnym  $M$ . Teoria rozmaitości pozwala zatem stwierdzić, że każda grupa o skończonej prezentacji jest quasi-izometryczna z czterowymiarową rozmaitością riemannowską.

Niech  $G$  będzie spójną grupą Liego. Dyskretną podgrupę  $\Gamma$  w  $G$  nazywamy *kratką*, jeśli iloraz  $\Gamma \backslash G$  ma skończoną miarę (pochodzącą od miary Haara na  $G$ ). Krata  $\Gamma$  w  $G$  jest *jednostajna*, jeśli  $\Gamma \backslash G$  jest przestrzenią zwartą. Z twierdzenia 1.4 możemy wywnioskować również, że jeśli  $\Gamma$  jest jednostajną kratką w  $G$ , to  $\Gamma$  jest quasi-izometryczna z  $G$ , przy czym na  $G$  rozważamy dowolną lewo niezmienniczą metrykę riemannowską.

Jak już wspomnieliśmy, klasy quasi-izometryczności mogą być dość spore. Przykładowo, dla dowolnej liczby naturalnej  $k \geq 2$  grupa wolna  $\mathbb{F}_k$  o  $k$  generatorach jest quasi-izometryczna z grupą  $\mathbb{F}_2$ . Wynika to z tego, że  $\mathbb{F}_2$  zawiera podgrupę skończonego indeksu izomorficzną z  $\mathbb{F}_k$ .

## 2 Wzrost grup

Niech  $\Gamma$  będzie skończenie generowaną grupą i niech  $S = S^{-1} \not\ni e$  będzie skończonym zbiorem generatorów dla  $\Gamma$ . Niech  $d$  będzie metryką na  $\Gamma$ , którą poprzednio oznaczaliśmy  $d_S$ . Zdefiniujemy teraz niezmiennik  $\delta(\Gamma)$ , który nazywamy *stopniem wzrostu wielomianowego*  $\Gamma$ :

$$\delta(\Gamma) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log b_S(k)}{\log k} \in [0, +\infty]$$

gdzie  $b_S(k)$  jest liczbą elementów kuli  $\{x \in \Gamma : d(x, e) \leq k\}$  o środku w  $e$  i promieniu  $k$ . Jeśli  $T$  jest innym skończonym zbiorem generującym dla  $\Gamma$ , to  $b_T(k) \leq b_S(\lambda k)$ , gdzie  $\lambda = \max\{d_S(e, t) : t \in T\}$ . Widać stąd, że  $\delta(\Gamma)$  nie zależy od wyboru zbioru generującego.

### Stwierdzenie 2.1

- (i) Jeśli  $\Gamma$  jest grupą skończoną, to  $\delta(\Gamma) = 0$ .
- (ii) Jeśli  $\Gamma$  jest grupą nieskończoną, to  $b_S(k+1) \geq b_S(k) + 1$  dla  $k \geq 0$ . Stąd  $\delta(\Gamma) \geq 1$ .
- (iii) Jeśli  $\Gamma''$  jest ilorazem  $\Gamma$ , to  $\delta(\Gamma'') \leq \delta(\Gamma)$ .
- (iv) Jeśli  $\Gamma'$  jest skończenie generowaną podgrupą  $\Gamma$ , to  $\delta(\Gamma') \leq \delta(\Gamma)$ .
- (v) Jeśli  $1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$  jest krótkim ciągiem dokładnym skończenie generowanych grup, to  $\delta(\Gamma) \geq \delta(\Gamma') + \delta(\Gamma'')$ . Równość zachodzi, na przykład, gdy  $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$ .

Powiemy, że grupa  $\Gamma$  ma *wzrost wykładniczy*, jeśli istnieją stałe  $u > 0$ ,  $v > 1$  takie, że  $b_S(k) \geq uv^k$  dla wszystkich  $k$ . Grupy o wzroście wykładniczym dostarczają przykładów

na to, że nierówność z punktu (v) stwierdzenia 2.1 jest ostra. Niech  $\alpha$  będzie macierzą z  $GL(2, \mathbb{Z})$  i niech  $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$  będzie odpowiednim iloczynem półprostym. Jeśli  $\alpha$  ma wartość własną o wartości bezwzględnej ściśle większej od 1, to  $\Gamma$  ma wzrost wykładniczy, a więc

$$\infty = \delta(\Gamma) > 2 + 1 = \delta(\mathbb{Z}^2) + \delta(\mathbb{Z}).$$

Nietrudno sprawdzić, że  $\delta(\mathbb{Z}^n) = n$  dla wszystkich naturalnych  $n$ . Grupy wolne  $\mathbb{F}_k$  o  $k \geq 2$  generatorach mają wzrost wykładniczy.

**Stwierdzenie 2.2** *Jeśli skończenie generowane grupy  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  są quasi-izometryczne, to  $\delta(\Gamma_1) = \delta(\Gamma_2)$ .*

DOWÓD. Ustalmy skończone zbiory generatorów  $S_1$  i  $S_2$  dla  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  i niech  $d_1$  i  $d_2$  będą odpowiednimi metrykami na  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  (tj. w notacji wprowadzonej wcześniej  $d_j = d_{S_j}$  dla  $j = 1, 2$ ). Dalej niech  $\Phi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  będzie quasi-izometrią przestrzeni metrycznych  $(\Gamma_1, d_1)$  i  $(\Gamma_2, d_2)$  ze stałymi  $\lambda$ ,  $C$  i  $D$  (tak jak w definicji 1.1). W szczególności dla dowolnych  $x, y \in \Gamma_1$  mamy

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - C \leq d_2(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + C.$$

Pokażemy, że  $\delta(\Gamma_1) \geq \delta(\Gamma_2)$ . Niech  $B_j(k)$  oznacza kulę w  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) o środku w elemencie neutralnym i promieniu  $k$ , a  $b_j(k)$  niech będzie mocą zbioru  $B_j(k)$ . Połóżmy też  $P = C + d_2(\Phi(e), e)$ . Jeśli  $z \in B_1(k)$ , to

$$d_2(\Phi(z), \Phi(e)) \leq \lambda k + C.$$

Zatem  $\Phi(B_1(k)) \subset B_2(\lambda k + P)$ . Z drugiej strony jeśli  $x, x' \in \Gamma_1$  są takie, że  $\Phi(x) = \Phi(x')$ , to  $d_1(x, x') \leq \lambda C$ , czyli przeciwobraz punktu zawiera się w pewnej kuli o promieniu  $\lambda C$ .

Możemy powyższe rozważania przeformułować tak: wszystkie punkty kuli  $B_1(k)$  przechodzą na punkty kuli  $B_2(\lambda k + P)$ , przy czym maksymalnie  $b_1(\lambda C)$  punktów z  $B_1(k)$  może przejść na ten sam punkt  $B_2(\lambda k + P)$ . Stąd dla dowolnego  $k \geq 0$  mamy

$$b_2(\lambda k + P) \geq \frac{b_1(k)}{b_1(\lambda C)}.$$

Co natychmiast dowodzi, że  $\delta(\Gamma_2) \geq \delta(\Gamma_1)$ .

Q.E.D.

Oto kilka prostych konsekwencji stwierdzenia 2.2

### Wniosek 2.3

- (i) *Abelowe grupy wolne  $\mathbb{Z}^n$  i  $\mathbb{Z}^m$  są quasi-izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy  $m = n$ .*
- (ii) *Abelowa grupa wolna  $\mathbb{Z}^n$  nie może być quasi-izometryczna z nieabelową grupą wolną  $\mathbb{F}_k$  dla  $k \geq 2$ .*

Niezwykłe interesujące jest następujące twierdzenie Gromova:

**Twierdzenie 2.4** *Niech  $\Gamma$  będzie skończenie generowaną grupą. Jeśli  $\delta(\Gamma) < \infty$ , to  $\delta(\Gamma)$  jest liczbą całkowitą.*

Powiemy, że skończenie generowana grupa  $\Gamma$  ma *wielomianowy wzrost*, jeśli jej stopień wzrostu wielomianowego jest skończony. Innymi słowy istnieją stałe  $C$  i  $p$  takie, że  $b_S(k) \leq Ck^p$  dla pewnego skończonego zbioru  $S$  generującego  $\Gamma$ . W twierdzeniu 3.3 zobaczymy, że geometryczne cechy takie jak wielomianowy wzrost mają daleko idące konsekwencje dla algebraicznej struktury grupy.

### 3 Własności geometryczne grup

Niech  $(W)$  będzie jakąś własnością skończenie generowanych grup. Powiemy, że  $(W)$  jest *własnością geometryczną*, jeśli dla dowolnej pary  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  quasi-izometrycznych skończenie generowanych grup fakt, że  $\Gamma_1$  ma własność  $(W)$  implikuje, że  $\Gamma_2$  także ją ma. Banalnym przykładem własności geometrycznej jest własność posiadania skończonej liczby elementów. Własności geometrycznych jest jednak dużo więcej i właśnie to powoduje, że geometryczna teoria grup jest taka ciekawa.

W stwierdzeniu 2.2 wykazaliśmy, że własność posiadania wzrostu wielomianowego równego zadanej stałej, jest własnością geometryczną.

**Stwierdzenie 3.1** *Posiadanie skończonej prezentacji jest własnością geometryczną.*

Powiemy, że grupa  $\Gamma$  ma *wirtualnie pewną własność  $(W)$* , jeśli  $\Gamma$  ma podgrupę skończonego indeksu posiadającą własność  $(W)$ . Możemy więc mówić o grupach wirtualnie abelowych, wirtualnie cyklicznych czy, na przykład, wirtualnie nilpotentnych lub wirtualnie policyklicznych.<sup>1</sup>

**Stwierdzenie 3.2**

- (i) *Wirtualna cykliczność jest własnością geometryczną.*
- (ii) *Wirtualna nilpotentność jest własnością geometryczną.*
- (iii) *Wirtualna abelowość jest własnością geometryczną.*

W tym miejscu możemy zacytować kolejne twierdzenie Gromova.

**Twierdzenie 3.3** *Skończenie generowana grupa  $\Gamma$  ma wzrost wielomianowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest wirtualnie nilpotentna.*

---

<sup>1</sup>Grupa  $\Gamma$  jest *policykliczna*, jeśli istnieje ciąg podgrup

$$\{e\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_{N-1} \subset \Gamma_N = \Gamma$$

takich, że  $\Gamma_p$  jest podgrupą normalną w  $\Gamma_{p+1}$  (tj. ciąg ten jest *subnormalny*) i ilorazy  $\Gamma_{p+1}/\Gamma_p$  są grupami cyklicznymi.

Problem czy wirtualna policykliczność jest własnością geometryczną jest otwarty.

Zwróćmy uwagę na to, że wzrost grupy jest pojęciem z geometrii metrycznej, natomiast wirtualna abelowość jest definiowana w terminach czysto algebraicznych.

Przejdźmy teraz do własności posiadania niezmienniczej średniej (po angielsku własność tę określa się słowem *amenability* czyli „podatność”). Grupa  $\Gamma$  posiada średnią, jeśli istnieje funkcjonal liniowy  $m: \ell^\infty(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  taki, że

1. Jeśli oznaczymy funkcję stałą równą 1 przez  $I$ , to  $m(I) = 1$ .
2. Dla dowolnej ograniczonej dodatniej funkcji  $f$  na  $\Gamma$  mamy  $m(f) \geq 0$ .
3. Dla dowolnej  $f \in \ell^\infty(\Gamma)$  i dowolnego  $x \in \Gamma$  mamy

$$m(f(x \cdot)) = m(f).$$

Istnieje bardzo sprytna charakteryzacja własności posiadania średniej.

**Twierdzenie 3.4 (E. Følner)** *Grupa  $\Gamma$  posiada średnią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  i dowolnego skończonego podzbioru  $K \subset \Gamma$  istnieje skończony i niepusty podzbiór  $U \subset \Gamma$  taki, że dla każdego  $x \in \Gamma$*

$$\frac{1}{|U|} |xU \div U| < \varepsilon$$

(przez  $|\cdot|$  oznaczamy moc zbioru, a „ $\div$ ” oznacza różnicę symetryczną).

Jeśli grupa  $\Gamma$  jest skończenie generowana, to można tę własność przeformułować w sposób „bardziej geometryczny”. Rozważmy graf Cayleya  $G(\Gamma, S)$  naszej grupy dla pewnego zbioru generatorów  $S$ . Dla dowolnego  $A \subset \Gamma$  (pamiętamy, że zbiór  $\Gamma$  utożsamiamy ze zbiorem wierzchołków grafu) przez  $\partial A$  będziemy rozumieć zbiór krawędzi grafu  $G(\Gamma, S)$  mających jeden koniec w  $A$ , a drugi w  $\Gamma \setminus A$ . Grupa  $\Gamma$  posiada średnią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\inf \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} : \emptyset \neq A \subset \Gamma, |A| < \infty \right\} = 0$$

**Stwierdzenie 3.5** *Posiadanie średniej jest własnością geometryczną.*

## 4 Grupy hiperboliczne

Niech  $(X, d)$  będzie geodezyjną przestrzenią metryczną. *Odcinkiem geodezyjnym* pomiędzy punktami  $x, y \in X$  nazwiemy obraz izometrycznego odwzorowania  $f: [0, d(x, y)] \rightarrow X$  takiego, że  $f(0) = x$  i  $f(d(x, y)) = y$ . Mimo że taki odcinek geodezyjny nie jest jedyny, przyjęło się oznaczać go symbolem  $[x, y]$ . Trzy odcinki geodezyjne  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$  i  $[x_2, x_0]$  tworzą *trójkąt geodezyjny*  $\Delta$ :

$$\Delta = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_0].$$

**Definicja 4.1** Niech  $(X, d)$  będzie geodezyjną przestrzenią metryczną. Powiemy, że przestrzeń  $X$  jest hiperboliczna, jeśli istnieje stała  $h \geq 0$  taka, że dla każdego trójkąta geodezyjnego  $\Delta = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_0]$  w  $X$  mamy

$$d(y, [x_k, x_{k+1 \bmod 3}] \cup [x_{k+1 \bmod 3}, x_{k+2 \bmod 3}]) \leq h$$

dla każdego  $y \in [x_{k-1 \bmod 3}, x_k]$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

Przykładem przestrzeni hiperbolicznej jest rozmaitość riemannowska o krzywiznie skalarnej ograniczonej z góry przez jakąś ujemną stałą, na przykład płaszczyzna hiperboliczna  $\mathbb{H}^2$ .

Hiperboliczność jest niezmiennikiem quasi-izometrii. Mówi o tym następujące twierdzenie Gromova:

**Twierdzenie 4.2** Niech  $(X, d)$  i  $(X', d')$  będą quasi-izometrycznymi geodezyjnymi przestrzeniami metrycznymi. Wówczas przestrzeń  $X$  jest hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń  $X'$  jest hiperboliczna.

**Definicja 4.3** Skończenie generowana grupa  $\Gamma$  jest hiperboliczna, jeśli graf Cayleya  $G(\Gamma, S)$  jest przestrzenią hiperboliczną dla pewnego skończonego zbioru generatorów  $S$ .

W świetle stwierdzenia 1.3, skończenie generowana grupa  $\Gamma$  jest hiperboliczna, jeśli  $G(\Gamma, S)$  jest przestrzenią hiperboliczną dla każdego skończonego zbioru generatorów  $S$ .

Grupy skończone są hiperboliczne. Na mocy punktu (i) stwierdzenia 3.2 skończenie generowane grupy quasi-izometryczne z  $\mathbb{Z}$  są hiperboliczne. Powyższe przykłady nazywamy *elementarnymi* grupami hiperboliczными.

Grupy wolne są hiperboliczne, jako że każdy trójkąt w grafie Cayleya grupy wolnej jest zdegenerowany (ów graf jest po prostu drzewem). Z punktu (iii) wniosku 1.5 wiemy, że grupy podstawowe powierzchni zamkniętych genusu  $\geq 2$  są hiperboliczne. Ogólniej, grupa podstawowa zwartej rozmaitości riemannowskiej o ujemnej krzywiznie skalarnej<sup>2</sup> jest hiperboliczna. Ponadto iloczyn wolny grup hiperbolicznych jest grupą hiperboliczną.

Istnieją przykłady par  $\Gamma_0 < \Gamma$  takich, że  $\Gamma$  jest hiperboliczna, a  $\Gamma_0$  skończenie generowana (a nawet skończenie prezentowalna!), ale  $\Gamma_0$  nie jest hiperboliczna.

## 4.1 Własności grup hiperbolicznych

**Twierdzenie 4.4** Niech  $\Gamma$  będzie grupą hiperboliczną. Wówczas

(i)  $\Gamma$  ma skończoną prezentację.

---

<sup>2</sup>Krywizna:  $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$ . Niech  $z_1, \dots, z_n$  będzie bazą ortonormalną przestrzeni  $T_p M$ . Krzywizna skalarna w punkcie  $p$  dana jest wzorem

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle.$$

- (ii)  $\Gamma$  ma skończenie wiele klas sprzężoności podgrup skończonych.
- (iii)  $\Gamma$  nie jest nieskończoną grupą torsyjną.
- (iv)  $\Gamma$  ma skończony wymiar kohomologiczny nad liczbami wymiernymi, tj.  $H^k(\Gamma, \mathbb{Q}) = \{0\}$  dla dostatecznie dużych  $k$ .
- (v) Każda wirtualnie rozwiązalna podgrupa w  $\Gamma$  jest wirtualnie cykliczna.<sup>3</sup>
- (vi) Centralizatory nieskończonych podgrup cyklicznych w  $\Gamma$  są wirtualnie cykliczne.

Ponadto jeśli dane są dwie skończenie prezentowalne grupy (wraz z prezentacjami), o których wiemy, że są hiperboliczne i beztorsyjne, to można podać algorytm, który po skończonym czasie pozwala stwierdzić czy grupy te są izomorficzne.

Przykładem zastosowania punktu (vi) jest następujące rozumowanie: niech  $\Gamma$  będzie grupą hiperboliczną. Przypuśćmy, że  $\mathbb{Z}^2$  jest podgrupą w  $\Gamma$ . Wtedy jest nią także nieskończona grupa cykliczna  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^2 \subset \Gamma$ . Ale centralizator  $\mathbb{Z}$  musi zawierać  $\mathbb{Z}^2$  (bo ta grupa jest przemienna), a z drugiej strony musi być wirtualnie cykliczny. To jest oczywiście niemożliwe, a zatem  $\mathbb{Z}^2$  nie może być podgrupą grupy hiperbolicznej.

Niech  $\Gamma$  będzie grupą o skończonej prezentacji:

$$\Gamma = \langle s_1, \dots, s_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle.$$

W powyższym zapisie  $s_1, \dots, s_n$  są generatorami<sup>4</sup> grupy wolnej  $\mathbb{F}_n$ , a  $R_1, \dots, R_m$  są zredukowanymi słowami w tej grupie. Grupa  $\Gamma$  powstaje jako iloraz  $\mathbb{F}_n$  przez najmniejszą podgrupę normalną  $\mathcal{N}(R_1, \dots, R_m) \subset \mathbb{F}_n$  zawierającą słowa  $R_1, \dots, R_m$ . Oznaczmy odwzorowanie ilorazowe przez  $\pi: \mathbb{F}_n \rightarrow \Gamma$ . Będziemy utożsamiać  $s_1, \dots, s_n$  z ich obrazami w  $\Gamma$ .

Możemy utworzyć funkcję Dehna, która przyporządkowuje liczbie  $k \in \mathbb{Z}_+$  najmniejszą liczbę  $l \in \mathbb{Z}_+$  taką, że każde słowo zredukowane o długości nie przekraczającej  $k$  w  $\ker \pi \subset \mathbb{F}(S)$  daje się zapisać jako produkt  $l$  elementów zbioru zawierającego wszystkie sprzężenia elementów  $R_1, \dots, R_m$  i ich odwrotności. Oznaczmy funkcję Dehna przez  $D: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Jeśli  $\tilde{D}$  jest funkcją Dehna dla innej skończonej prezentacji grupy  $\Gamma$ , to istnieją stałe  $c_1, c_2$  i  $c_3$  takie, że dla wszystkich  $k \in \mathbb{Z}_+$  mamy

$$\tilde{D}(k) \leq c_1 D(c_2 k) + c_3 k \quad \text{oraz} \quad D(k) \leq c_1 \tilde{D}(c_2 k) + c_3 k.$$

Możemy więc mówić o liniowej, kwadratowej, wielomianowej, wykładniczej, ... funkcji Dehna niezależnie od wyboru prezentacji.

Skończenie prezentowalna grupa  $\Gamma$  jest hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja Dehna jest liniowa oraz wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja Dehna spełnia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-2} D(k) = 0,$$

czyli jest „subkwadratowa”.

<sup>3</sup>Grupy (wirtualnie) rozwiązalne mają średnią; punkt (v) można uogólnić także na podgrupy posiadające średnią.

<sup>4</sup>Dla zbiorów generujących grupy wolne robimy wyjątek od naszej reguły, że zbiory generujące są symetryczne. Pomiedzy generatorami grupy wolnej nie ma żadnych relacji, w szczególności  $s_i$  nie jest elementem odwrotnym do żadnego  $s_j$ .

## 5 Grupy Kazhdana

Grupy Kazhdana nazywamy też grupami o własności (T). Najkrócej własność tę można opisać mówiąc, że grupa  $G$  ma własność (T), jeśli reprezentacja trywialna jest punktem izolowanym zbioru (klas równoważności) reprezentacji nieprzywiedlnych w pewnej naturalnej topologii.<sup>5</sup> Opiszemy teraz tę własność w sposób bardziej standardowy.

Ustalmy lokalnie zwartą grupę  $G$  i niech  $\pi$  będzie unitarną reprezentacją  $G$  w przestrzeni Hilberta  $H$ . Zawsze będziemy zakładać, że reprezentacje są mocno ciągle i działają w ośrodkowych przestrzeniach Hilberta. Powiemy, że  $\pi$  *ma wektor niezmienniczy*, jeśli istnieje niezerowy  $\xi \in H$  taki, że  $\pi(g)\xi = \xi$  dla wszystkich  $g \in G$ . Powiemy natomiast, że  $\pi$  *prawie ma wektory niezmiennicze*, jeśli dla każdego zwartego podzbioru  $K \subset G$  i każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje niezerowy wektor  $\xi \in H$  taki, że

$$\|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon\|\xi\|$$

dla wszystkich  $g \in K$ .

**Definicja 5.1** *Niech  $G$  będzie grupą lokalnie zwartą. Powiemy, że  $G$  ma własność (T), jeśli dla każdej reprezentacji unitarnej  $\pi$  grupy  $G$  mamy*

$$\left( \begin{array}{c} \pi \text{ prawie ma} \\ \text{wektory niezmiennicze} \end{array} \right) \implies \left( \begin{array}{c} \pi \text{ ma wektor} \\ \text{niezmienniczy} \end{array} \right).$$

Można nieco uprościć tę definicję dla grup generowanych przez zbiory zwarte:

**Stwierdzenie 5.2** *Niech  $G$  będzie grupą lokalnie zwartą generowaną przez podzbiór zwarty  $K \subset G$ . Jeśli istnieje liczba  $\varepsilon > 0$  taka, że dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji  $\pi$  grupy  $G$  działającej w przestrzeni Hilberta  $H_\pi$  mamy*

$$\left( \begin{array}{c} \exists \xi \in H_\pi, \|\xi\| = 1, \\ \sup_{g \in K} \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \end{array} \right) \implies \left( \pi \text{ jest reprezentacją trywialną} \right),$$

to  $G$  ma własność (T).

---

<sup>5</sup>Topologię tę nazywamy *topologią Fella*. Wprowadza się ją na zbiorze  $\tilde{G}$  klas równoważności reprezentacji unitarnych  $G$ . Bazę otoczeń (klasy) reprezentacji  $\pi$  stanowią zbiory  $V(\pi, K, \varepsilon, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , gdzie  $K$  jest zwartym podzbiorem  $G$ ,  $\varepsilon > 0$ , a  $\xi_1, \dots, \xi_n$  jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta  $H_\pi$ , w której działa reprezentacja  $\pi$ . Zbiór  $V(\pi, K, \varepsilon, \xi_1, \dots, \xi_n)$  składa się z tych reprezentacji  $\sigma$ , dla których istnieje układ ortonormalny  $\eta_1, \dots, \eta_n$  w przestrzeni  $H_\sigma$  taki, że

$$\sup_{g \in K} |(\eta_k | \sigma(g) | \eta_l) - (\xi_k | \pi(g) | \xi_l)| < \varepsilon$$

dla  $k, l = 1, \dots, n$ . Zbiór  $\hat{G}$  klas reprezentacji nieprzywiedlnych jest podzbiorem  $\tilde{G}$  i rozważamy na nim topologię odziedziczoną z  $\tilde{G}$ . Grupa  $G$  ma własność (T) wtedy i tylko wtedy, gdy jednowymiarowa reprezentacja trywialna jest punktem izolowanym przestrzeni  $\hat{G}$ .

Tak więc od razu widzimy, że grupy zwarte (a więc i skończone) są grupami Kazhdana.<sup>6</sup> Z drugiej strony mamy

**Stwierdzenie 5.3** *Niech  $G$  będzie grupą lokalnie zwartą.<sup>7</sup> Następujące warunki są równoważne:*

- (i)  $G$  jest zwarta.
- (ii)  $G$  ma średnią i własność (T).

DOWÓD. Implikacja (i)  $\Rightarrow$  (ii) jest trywialna. Z drugiej strony, jeśli  $G$  ma średnią, to reprezentacja regularna  $\lambda_G$  prawie ma wektory niezmiennicze (to nie jest zbyt trudne). Dalej, jeśli  $G$  ma własność (T), to  $\lambda_G$  musi mieć wektor niezmienniczy. Nietrudno się przekonać, że musi to być funkcja stała. Ale wtedy miara Haara na  $G$  musi być skończona (bo funkcja stała należy do  $L^2(G)$ ), a co za tym idzie  $G$  jest zwarta. Q.E.D.

Innymi słowy grupy o własności (T) są „przeciwieństwem” grup ze średnią, z dokładnością do grup zwartych.

Grupy Kazhdana są „bardzo nieprzemienne”. Oto kilka prostych własności takich grup:

**Twierdzenie 5.4** *Niech  $G$  będzie grupą Kazhdana. Wówczas*

- (i) *Jeśli  $\Phi: G \rightarrow H$  jest homomorfizmem, to podgrupa  $\overline{\Phi(G)}$  w  $H$  jest grupą Kazhdana.*
- (ii) *Każdy iloraz  $G$  ma własność (T).*
- (iii) *Każdy homomorfizm z  $G$  w grupę posiadającą średnią ma relatywnie zwarty obraz.*
- (iv)  *$G$  jest unimodularna.*
- (v) *Grupa abelowa  $G / \overline{[G, G]}$  jest zwarta.*

Wiadomo również, że każda grupa Kazhdana jest generowana przez zwarty podzbiór (por. stwierdzenie 5.2), co w przypadku grup dyskretnych oznacza, że są one skończenie generowane.

Przykładami grup Kazhdana są  $SL(n, \mathbb{R})$  dla  $n \geq 3$  i ogólniej  $SL(n, \mathbb{K})$  gdzie  $\mathbb{K}$  jest ciałem lokalnym.<sup>8</sup> Własność (T) mają też grupy symplektyczne  $Sp(n, \mathbb{K})$  dla  $n \geq 2$ . Grupa  $SL(2, \mathbb{K}) = Sp(2, \mathbb{K})$  nie ma własności (T). Można pokazać, że proste spójne grupy Liego rzeczywistej rangi  $\geq 2$  mają własność (T).

Trudniej jest znaleźć przykłady dyskretnych grup Kazhdana. Grupy wolne  $\mathbb{F}_n$  nie mają własności (T). Ponadto jeśli dyskretna grupa  $\Gamma$  ma własność (T), to nie można jej przedstawić jako iloczyn wolny z amalgamacją  $A *_C B$  gdzie  $A$ ,  $B$  i  $C$  są grupami skończonymi. Oznacza to, na przykład, że  $SL(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$  nie ma własności (T). Następujące twierdzenie pozwala jednak znajdować wiele przykładów dyskretnych grup Kazhdana:

<sup>6</sup>Grupa dwoista do grupy zwartej (być może kwantowa) jest dyskretna!

<sup>7</sup>Własność (T) można zdefiniować również dla grup, które nie są lokalnie zwarte. Stwierdzenie 5.3 nie jest wówczas prawdziwe.

<sup>8</sup>Ciało lokalne jest to lokalnie zwarte (ale nie dyskretne) ciało, którego topologia pochodzi od „wartości bezwzględnej”.

**Twierdzenie 5.5** *Niech  $G$  będzie grupą Kazhdana i niech  $H$  będzie domkniętą podgrupą w  $G$  taką, że  $G/H$  ma skończoną miarę (pochodzącą od miary Haara na  $G$ ). Wówczas  $H$  jest grupą Kazhdana.*

**Wniosek 5.6** *Niech  $G$  będzie grupą Kazhdana i niech  $\Gamma$  będzie kratą w  $G$ . Wówczas  $\Gamma$  jest grupą Kazhdana.*

**Uwaga 5.7** W najnowszej książce Bekki, de la Harpe’a i Valette o własności (T) można przeczytać, że *nie jest* ona własnością geometryczną.

## 5.1 Ciekawe zastosowanie

Badanie grup o własności (T) okazało się pomocne w rozwiązaniu problemu postawionego w latach dwudziestych. Wiadomo, że znormalizowana miara Lebesgue’a na sferach  $\mathbb{S}^{n-1}$  ( $n \geq 2$ ) jest jedyną miarą niezmienniczą dla naturalnego działania  $SO(n)$ . Czy jest ona jednak jedyna pośród funkcji  $\varphi$  zdefiniowanych na  $\sigma$ -algebrze  $\mathcal{L}$  zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a i mających następujące własności:

1.  $\varphi(B) = 0$  jeśli  $B$  jest zbiorem miary Lebesgue’a zero.
2.  $\varphi(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$ .
3.  $\varphi(B_1 \cup B_2) = \varphi(B_1) + \varphi(B_2)$  dla dowolnych rozłącznych  $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ .

Funkcje takie nazywa się czasem „średnimi” lub „miarami skończenie addytywnymi”. Są one w bijekcji ze stanami algebry  $L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$  (niekoniecznie normalnymi). Pytanie o istnienie  $\varphi$  innych niż miara Lebesgue’a sprowadza się więc do pytania o istnienie niezmienniczych stanów na  $L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$  innych niż całkowanie względem znormalizowanej miary Lebesgue’a.

Dla  $n = 2$  odpowiedzi na powyższe pytanie udzielił Stefan Banach w 1932 roku pokazując, że istnieją inne niezmiennicze średnie. Na początku lat osiemdziesiątych dwudziestego wieku kilku autorów niezależnie udowodniło następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 5.8 (Rosenblatt, Margulis, Sullivan)** *Dla  $n \geq 5$  miara Lebesgue’a jest jedyną średnią na  $\mathbb{S}^{n-1}$  niezmienniczą dla działania  $SO(n)$ .*

Dowód tego twierdzenia opiera się na dwóch faktach. Po pierwsze, dla  $n \geq 5$  istnieje przeliczalna gęsta podgrupa  $\Gamma$  w  $SO(n)$ , która ma własność (T). Po drugie, jeśli istnieje średnia inna niż miara Lebesgue’a, to podgrupa ta prawie ma wektory niezmiennicze w naturalnej reprezentacji w podprzestrzeni  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  ortogonalnej do funkcji stałych.

Rezultat ten doczekał się bardzo ciekawych uogólnień między innymi w pracy Connesa i Weissa można znaleźć twierdzenie mówiące, że następujące warunki są równoważne dla przeliczalnej grupy  $G$ :

1.  $G$  ma własność (T).

2. Dla każdego ergodycznego i zachowującego miarę działania  $G$  na bezatomowej przestrzeni probabilistycznej istnieje dokładnie jedna niezmiennicza średnia.

Stosując wyrafinowane techniki teorii grup Kazhdana, Margulis udowodnił również jedynność średniej na  $\mathbb{S}^{n-1}$  niezmienniczej dla działania  $SO(n)$  dla  $n = 3$  i  $n = 4$ .

## 6 Grupy losowe

Mówiąc „grupy losowe” mamy tak na prawdę na myśli „losowe prezentacje grup”. Interesować nas będą więc prezentacje postaci

$$\Gamma = \langle s_1, \dots, s_n \mid R_1, \dots, R_k \rangle, \quad (2)$$

gdzie  $s_1, \dots, s_n$  są generatorami grupy wolnej  $\mathbb{F}_n$ , a  $R_1, \dots, R_k$  relacjami, czyli słowami w  $\mathbb{F}_n$  (zawsze będziemy zakładać, że relacje są słowami zredukowanymi). Grupa  $\Gamma$  jest z definicji ilorazem grupy wolnej  $\mathbb{F}_n$  przez najmniejszą podgrupę normalną  $\mathcal{N}(R_1, \dots, R_k) \subset \mathbb{F}_n$  zawierającą relacje  $R_1, \dots, R_k$ . Elementy  $s_1, \dots, s_n$  identyfikujemy z ich obrazami w  $\Gamma$  i nazywamy generatorami grupy  $\Gamma$ . Losowa prezentacja jest to, najogólniej, taka prezentacja, w której dane  $n, k$  oraz słowa  $R_1, \dots, R_k$  są losowe.

Oczywiście nie można zbyt wiele powiedzieć o grupie zadanej taką prezentacją bez nakładania dodatkowych warunków na dane. Można na przykład ustalić  $n$  lub  $k$ , albo długość słów  $R_1, \dots, R_k$ . Taki zestaw warunków zadaje *model*, którym się zajmujemy.

Dla przykładu rozważmy następujący model: ustalmy liczbę  $d \in [0, 1]$  i niech  $P(n, d)$  będzie zbiorem wszystkich prezentacji postaci (2) takich, że istnieje stała  $C \geq 1$  taka, że

$$\frac{(2n-1)^{3d}}{C} \leq k \leq C(2n-1)^{3d}$$

(gdzie  $k$  jest liczbą relacji) i wszystkie relacje mają długość 3. Jeśli będziemy teraz powiększać liczbę generatorów  $n$ , to w zależności od wyboru  $d$  możemy otrzymać grupy dwóch rodzajów. Jeśli  $d > \frac{1}{2}$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathcal{P} \in P(n, d) : \mathcal{P} \text{ definiuje grupę trywialną}\}}{\#P(n, d)} = 1.$$

Jeśli  $d < \frac{1}{2}$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathcal{P} \in P(n, d) : \mathcal{P} \text{ definiuje nieskończoną grupę hiperboliczną}\}}{\#P(n, d)} = 1.$$

Innymi słowy, gdy zwiększamy liczbę generatorów i  $d < \frac{1}{2}$ , to z prawdopodobieństwem 1 otrzymamy nieskończoną grupę hiperboliczną. Jeśli  $d > \frac{1}{2}$ , to z prawdopodobieństwem 1 otrzymamy grupę trywialną.

Na koniec omówimy model, w którym ustalamy liczbę generatorów  $n$ . Podobnie jak wcześniej ustalamy także parametr  $d \in [0, 1]$ . Oznaczamy przez  $P(n, d, l)$  zbiór wszystkich prezentacji takich, że istnieje stała  $C \geq 1$  taka, że liczba relacji  $k$  spełnia

$$\frac{(2n-1)^{dl}}{C} \leq k \leq C(2n-1)^{dl},$$

a długość wszystkich słów  $R_1, \dots, R_k$  jest równa  $l$ . Tym razem zamiast zwiększać liczbę generatorów naszej grupy losowej, będziemy zwiększać długość relacji.

**Twierdzenie 6.1 (Gromov)** *Jeśli  $d > \frac{1}{2}$ , to*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathcal{P} \in P(n, d, l) : \mathcal{P} \text{ definiuje grupę trywialną lub } \mathbb{Z}_2\}}{\#P(n, d, l)} = 1.$$

*Jeśli  $d < \frac{1}{2}$ , to*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathcal{P} \in P(n, d, l) : \mathcal{P} \text{ definiuje nieskończoną grupę hiperboliczną}\}}{\#P(n, d, l)} = 1.$$

Powyższe twierdzenie zostało niedawno uzupełnione w następujący sposób:

**Twierdzenie 6.2 (Andrzej Żuk)** *Jeśli  $d > \frac{1}{3}$ , to*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathcal{P} \in P(n, d, l) : \mathcal{P} \text{ definiuje grupę Kazhdana}\}}{\#P(n, d, l)} = 1.$$

Powyższe twierdzenia można traktować jako argument za tym, że grup hiperbolicznych i Kazhdana jest pod dostatkiem. W szczególności dla  $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$ , z prawdopodobieństwem 1 otrzymamy nieskończoną grupę hiperboliczną o własności (T).